1 Cálculo numérico e algébrico

1.1 OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

Frações

As frações são formas de representar uma quantidade a partir de um valor que é dividido por um determinado número de partes iguais entre si.

Por exemplo, se uma barra de chocolate estiver dividida em 12 partes iguais e alguém partir 5 dessas partes para comer, a quantidade de chocolate retirada poderá ser representada através da fração $\frac{5}{12}$ (5 partes de uma unidade dividida em 12 partes iguais).

Simplificação de frações

Quando multiplicamos ou dividimos simultaneamente o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número, diferente de zero, não alteramos o seu valor.

$$\frac{21 \div 3}{18 \div 3} = \frac{7}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{7 \times 3}{6 \times 3} = \frac{21}{18}$$

Sejam a, b e n números inteiros, com $b \neq 0$ e $n \neq 0$, então:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div n}{b \div n}$$

As frações $\frac{21}{18}$ e $\frac{7}{6}$ são **equivalentes**, porque representam a mesma quantidade. A fração $\frac{7}{6}$ é **irredutível**, isto é, não se pode simplificar mais, uma vez que o máximo divisor comum entre os números que aparecem no numerador e denominador é 1.

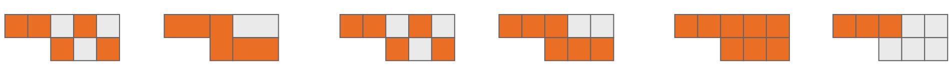
Operações com frações

Nem todas as frações se podem escrever sob a forma de uma dízima finita. Por exemplo, $\frac{1}{3} = 0{,}33333$. Desta forma, é necessário conhecer as regras para operar com frações, sem passar pela escrita decimal.

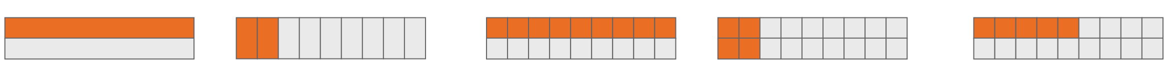
Adição e subtração de frações

Para adicionar ou subtrair números representados por frações é necessário que estes tenham o mesmo denominador.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \; c \neq 0$$



$$\frac{5}{8} + \frac{3}{4} = \frac{5}{8} + \frac{6}{8} = \frac{11}{8}$$



$$\frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{9}{18} - \frac{4}{18} = \frac{5}{18}$$

(18 é o mínimo múltiplo comum dos números 2 e 9)

EXEMPLO RESOLVIDO 1

Efetua as operações e apresenta o resultado sob a forma de uma fração irredutível.

1) $\frac{10}{8_{(x\,3)}} + \frac{1}{6_{(x\,4)}} = \frac{30}{24} + \frac{4}{24} = \frac{34}{24} = \frac{17}{12}$

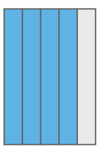
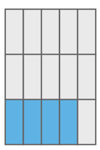
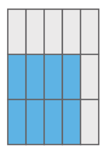
2) $\frac{42}{120} - 3 = \frac{42}{120} - \frac{3}{1_{(x\,120)}} = \frac{42}{120} - \frac{360}{120} = \frac{42-360}{120} = \frac{-318}{120} = -\frac{53}{20}$

Multiplicação e divisão de frações

O produto de duas frações é uma fração cujo numerador é o produto dos numeradores, e o denominador é o produto dos denominadores.

$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a \times b}{c \times d}$, *a, b, c* e *d* números inteiros, sendo *c* e *d* não nulos.

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ = ? (queremos calcular o "dobro" da "terça parte" de $\frac{4}{5}$)

 $\frac{4}{5}$;  a "terça parte" de $\frac{4}{5}$;  o "dobro" da "terça parte" de $\frac{4}{5}$, isto é, $\frac{8}{15}$.

Então, $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$

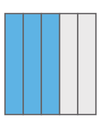
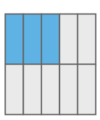
Para determinar o quociente entre duas frações, diferentes de zero, multiplica-se o dividendo pelo inverso do divisor.

No geral, a operação divisão é inversa da multiplicação.

por exemplo, $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = x \Leftrightarrow \frac{4}{5} \times x = \frac{2}{3}$

Ora, $\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} \times x = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$, ou seja $x = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$

$\frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b} = \frac{a \times d}{c \times b}$ *a, b, c* e *d* números inteiros com *b, c* e *d* não nulos.

 $\frac{3}{5}$;  metade de $\frac{3}{5}$, isto é, $\frac{3}{10}$.

Então $\frac{3}{5} \div 2 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{5 \times 2} = \frac{3}{10}$

EXEMPLO RESOLVIDO 2

Efetua as operações e apresenta o resultado sob a forma de uma fração irredutível.

1) $\frac{8}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{8 \times 3}{6 \times 2} = \frac{24}{12} = 2$

2) $\frac{1}{2} \times \frac{721}{3} \times \frac{5}{9} = \frac{1 \times 721 \times 5}{2 \times 3 \times 9} = \frac{3605}{54}$

3) $\frac{11}{4} \div \frac{7}{16} = \frac{11}{4} \times \frac{16}{7} = \frac{11 \times 16}{4 \times 7} = \frac{176}{28} = \frac{44}{7}$

4) $\frac{9}{13} \div \frac{1}{8} = \frac{9}{13} \times \frac{8}{1} = \frac{72}{13}$

5) $\frac{25}{6} \div \frac{1}{5} = \frac{25}{6} \times \frac{5}{1} = \frac{125}{6}$

Uma outra forma frequentemente usada na divisão de frações é a seguinte:

Para dividir $\frac{25}{6}$ por $\frac{1}{5}$ -> $\frac{\frac{25}{6}}{\frac{1}{5}} = \frac{25}{6} \times \frac{5}{1} = \frac{125}{6}$

Para facilitar o cálculo, $\times \frac{\frac{25}{6}}{\frac{1}{5}} \times$

$5 \div \frac{1}{3} = \times \frac{\frac{5}{1}}{\frac{1}{3}} \times = 15$

TAREFA 1:

Efetua as operações e apresenta o resultado sob a forma de uma fração irredutível.

a) $\frac{1}{6} \times \frac{3}{2} - \frac{7}{4}$

b) $\frac{3}{2} \div \left(-\frac{7}{4}\right)$

c) $-3 + \frac{1}{5} \div \frac{3}{2}$

d) $\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4} + 3\right)$

e) $-\frac{1}{8} \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{7}$

f) $\frac{5}{3} \div \frac{2}{9} + 3\left(\frac{1}{2} - \frac{7}{5}\right)$

g) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{2} \times \frac{9}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$

h) $-\frac{3}{8} \div \left[\left(-\frac{28}{10}\right) \div \left(-\frac{7}{5}\right)\right] + 4$

1.2 Equações do 1º e do 2º grau

Expressões algébricas

Em Economia é usual utilizarem-se expressões nas quais aparecem letras que podem assumir diversos valores. Por exemplo, “Um indivíduo comprou uma determinada quantidade de ananases e de cocos. Se cada quilo de ananases custar x cêntimos e cada quilo de cocos custar y cêntimos, o que representa a **expressão** “ $8x + 3y$ ” .

A expressão traduz o custo total de 8 quilos de ananases e 3 quilos de cocos.

As letras utilizadas para representar um valor que possa variar (num conjunto de valores para os quais a expressão tem sentido) são as **variáveis**.

EXEMPLO RESOLVIDO 3

Simplifica a expressão algébrica que se segue:

12b − 6c − 4d + 2b + 8d − 4 + 13c.

12b - 6c - 4d + 2b + 8d - 4 + 13c =

= 12b + 2b - 6c + 13c - 4d + 8d - 4 = ← Identificar os termos semelhantes, isto é, os termos com a mesma parte literal

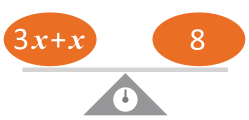
= 14b + 7c + 4d - 4 ← Reduzir os termos semelhantes

Equações do 1º grau

Quando escrevemos uma igualdade entre duas expressões onde figura pelo menos uma letra, temos uma **equação**.

Por exemplo, dois irmãos possuem 8 cabras. Sabendo que o irmão mais velho tem o triplo das cabras do irmão mais novo, determina quantas cabras tem cada irmão.

Podemos escolher uma letra (x - **incógnita**) que represente o número de cabras do irmão mais novo e escrever uma equação que traduza o problema.



$3x + x = 8$

Esta equação é do 1º grau, com uma incógnita.
1º membro: $3x + x$ 2º membro: 8

Esta igualdade pode ser verdadeira ou falsa, dependendo dos valores que atribuirmos a x.

Neste caso **2** é a solução da equação, pois 3 x 2 + 2 = 8 é uma proposição verdadeira.

Podemos escrever CS = {2} *(conjunto solução da equação)*.

Depois de resolvida a equação que traduz o enunciado do problema, devemos verificar se a solução da equação é a solução do problema, atendendo ao contexto.

Então, o irmão mais velho tem 6 cabras (o triplo de 2) e o irmão mais novo tem 2 cabras.

Os valores da incógnita que transformam a equação numa afirmação verdadeira chamam-se **soluções**.

EXEMPLO RESOLVIDO 4

Resolve a equação do 1º grau $\frac{1-x}{3}-2(x-5)=-\frac{7}{6}$

$$\frac{1-x}{3}-2x+10=-\frac{7}{6}$$

Desembaraçar de parênteses, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

$$\frac{1-x}{3_{(\times 2)}}-\frac{2x}{1_{(\times 6)}}+\frac{10}{1_{(\times 6)}}=-\frac{7}{6_{(\times 1)}}$$

Reduzir ambos os termos ao mesmo denominador.

$$\frac{2-2x}{6}-\frac{12x}{6}+\frac{60}{6}=-\frac{7}{6}$$

$$2-2x-12x+60=-7$$

$$-2x-12x=-7-2-60$$

Escrever os termos com incógnita num dos membros e os termos sem incógnita no outro e reduzir a equação à forma $ax=b$.

$$-14x=-69$$

$$x=\frac{-69}{-14}$$

A equação tem uma solução da forma $x=\frac{b}{a}$, $a\neq 0$

$$x=\frac{69}{14}$$

$$CS=\left\{\frac{69}{14}\right\}$$

TAREFA 2:

Resolve as seguintes equações do 1º grau com uma incógnita.

a) $\frac{9x}{2}-\frac{9x-9}{3}=18$

b) $\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}-7x\right)=2$

c) $\frac{2(4a-3)}{5}=-6$

d) $\frac{7-7x}{5}-14(x-3)=-14$

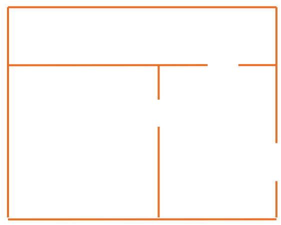
e) $b-\frac{1}{7}b-\frac{1}{4}b-7\left(\frac{1}{7}b-\frac{1}{4}b\right)=1$

f) $\frac{1}{6}(y+15)=\frac{1}{5}\left(3y-\frac{5}{6}\right)$

Equações do 2º grau

Considera o seguinte exemplo:

Na figura ao lado está representada a planta de uma habitação tradicional de Oecusse. Determina o(s) valor(es) de x, sabendo que a habitação tem área igual a 15 m².



Como a planta da habitação é retangular, temos que a área é dada por

$x\,(x + 2)$, $x > 0$

Para determinar os possíveis valores de x que satisfazem a condição inicial, temos que resolver a equação $x\,(x + 2) = 15$

$$x \times (x+2) = 15 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 15 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$

A equação $x^2 + 2x - 15 = 0$ **é do 2º grau**, com uma incógnita, porque é do tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \,,\, a \neq 0$$

1º membro: $x^2 + 2x - 15$

2º membro: 0

Termos: x^2 ; $2x$; -15

O método mais usual para resolver as soluções de uma equação do 2º grau (essencialmente equações do 2º grau completas, com a ≠ 0, b ≠ 0 e c ≠ 0) é através da aplicação de uma fórmula, denominada "**fórmula resolvente**".

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \,,\, a \neq 0$$

Na equação $x^2 + 2x - 15 = 0$ temos: coeficiente do termo em x^2: $a = 1$

coeficiente do termo em x : $b = 2$

termo independente: $c = -15$

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{(+2)^2 - 4 \times 1 \times (-15)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2+8}{2} \vee x = \frac{-5-8}{2} \quad \Leftrightarrow x = 3 \quad \vee \quad x = -6{,}5$$

Então, como x é uma medida de comprimento, x=3 metros.

A habitação tem dimensões 3 metros de comprimento e 5 metros de largura.

EXEMPLO RESOLVIDO 5

Resolve em *IR* as seguintes equações do 2º grau, aplicando a fórmula resolvente:

a) $5(1-2x)=6x\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)$

$$5(1-2x)=6x\left(1-\frac{1}{2}x^2\right) \Leftrightarrow 5-10x=6x-3x^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-16x+5=0$$

Desembaraçar de parênteses e de denominadores e reduzir a equação à forma canónica $ax + bx + c = 0$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-(-16)\pm\sqrt{(-16)^2-4\times 3\times 5}}{2\times 3} \Leftrightarrow x=\frac{16\pm\sqrt{196}}{6}$$

Aplicar a fórmula resolvente

$$\Leftrightarrow x=\frac{16+14}{6} \vee x=\frac{16-14}{6} \Leftrightarrow x=5 \vee x=\frac{1}{3}$$

$$CS=\left\{\frac{1}{3};5\right\}$$

b) $7+\frac{x^2}{7}=2x$

$$7+\frac{x^2}{7}=2x \Leftrightarrow \frac{7}{1_{(\times 7)}}+\frac{x^2}{7}=\frac{2x}{1_{(\times 7)}} \Leftrightarrow \frac{49}{7}+\frac{x^2}{7}=\frac{14x}{7} \Leftrightarrow x^2-14x+49=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\times 1\times 49}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=\frac{14\pm\sqrt{0}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{14+0}{2} \vee x=\frac{14-0}{2} \Leftrightarrow x=7$$

$$CS=\{7\}$$

c) $3=4x-4x^2$

$$3=4x-4x^2 \Leftrightarrow 4x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times 4\times 3}}{2\times 4} \Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{-32}}{8}$$

$$CS=\{\ \}$$

TAREFA 3:

Resolve em *IR* as seguintes equações do 2º grau:

a) $1-2x=-3x^2$

b) $(x-3)(2x-5)=3x(x-2)$

c) $-1=-4x(-x+1)$

1.3 Proporcionalidade e linearidade

Proporcionalidade direta

É frequente depararmo-nos com situações do nosso quotidiano que necessitam de alguns cálculos para serem resolvidas. Por vezes, a situação é simples e as operações de adição e multiplicação são suficientes. Por exemplo, se um comerciante vende 2 kg de laranjas por 60 cêntimos, facilmente se conclui que 8 kg de laranjas custam 2,40 USD porque o custo de 8 kg é igual a 4 vezes o custo de 2 kg. Desta forma, 10 kg custam 5 vezes mais do que 2 kg (3,00 USD) e 18 kg custam 9 vezes mais do que 2 kg ou a soma do custo de 10 kg com 8 kg.

Quantidade (kg)	2	8	10	18
Custo (USD)	0,60	2,40	3,00	5,40

Para obtermos os valores da segunda linha (custo) multiplicamos os valores da primeira linha (quantidade) por um mesmo número (0,30).

Neste caso dizemos que estamos perante uma situação de proporcionalidade e o valor 0,30 corresponde ao preço, em USD, de um quilo de laranjas.Considera agora a correspondência entre o número de horas de trabalho de um funcionário de uma empresa e a quantia ganha (em USD).

Número de horas de trabalho h	Quantia ganha, em USD Q
12	7,80
25	16,25
34	22,10
50	32,50

a) Completa a expressão $\frac{Q}{h} = \_\_\_\_$

$\frac{Q}{h} = 0{,}65$ *(Também podemos escrever $Q = 0{,}65\,h$)*

b) O que significa o valor 0,65 no contexto da situação?

O valor 0,65 significa a quantia ganha, em USD, numa hora de trabalho.

c) Quanto ganhará o funcionário se trabalhar 10 horas?

$Q = 0{,}65\,h$, $\quad Q = 0{,}65 \times 10 \Leftrightarrow Q = 6{,}50$

O funcionário ganhará 6,50 USD.

d) Quantas horas trabalhou o funcionário, sabendo que a quantia recebida foi de 10,40 USD?

$Q = 0{,}65\,h$, $\quad 10{,}4 = 0{,}65h \Leftrightarrow h = \frac{10{,}4}{0{,}65} \Leftrightarrow h = 16$

O funcionário trabalhou 16 horas.

e) Resolve a equação $Q = 0{,}65$ em ordem a h.

$Q = 0{,}65h \Leftrightarrow h = \frac{Q}{0{,}65}$

Sendo o quociente (razão) entre os valores correspondentes das duas grandezas constante (e igual a $0{,}65$), estas dizem-se **diretamente proporcionais**.

Duas grandezas, x e y, são diretamente proporcionais se a razão entre os valores correspondentes é constante.

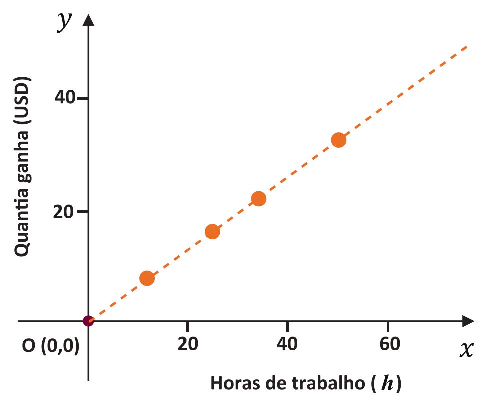
$\frac{y}{x} = k$, $k \neq 0$ ou $y = kx$, sendo k a constante de proporcionalidade e $x \neq 0$.

Todos os pontos do gráfico deste tipo de correspondência estão sobre uma reta que passa na origem do referencial.

Este tipo de relação entre duas grandezas pode ser denominada de linear, podendo ser definida através de uma tabela, de uma expressão analítica ou de um gráfico.

Expressão analítica **Gráfico**

$Q = 0{,}65h$



Relembrando a linguagem das funções que já estudaste, a cada número de horas de trabalho h corresponde uma e uma só quantia recebida Q , igual a $0{,}65\,h$.

Uma função linear f é uma função definida por uma expressão do tipo $y = kx$, $k \neq 0$

EXEMPLO RESOLVIDO 6

Um cozinheiro quer fazer "Flor de Papaia com Carne de Porco" para 7 pessoas. Para 5 pessoas são necessárias 250 g de carne de porco entremeada com alguma gordura.

Que quantidade de carne será necessária para 7 pessoas?

Q = 50 x 7

Q = 350

São necessárias 350 gramas de carne para 7 pessoas.

$\times 50$

5	7
250	Q

$\times 50$

Propriedades

Se para 5 pessoas são necessárias 250 g e para 7 pessoas são necessárias 350 g, então para **5 + 7 = 12** pessoas são necessárias **250 + 350 = 600** g de carne.

$$p_1 = 5 \quad \rightarrow \quad Q_1 = 250$$
$$p_2 = 7 \quad \rightarrow \quad Q_2 = 350$$
$$p_1 + p_2 = 12 \quad \rightarrow \quad Q_1 + Q_2 = 600$$

Se a receita for feita para o dobro das pessoas, precisaremos do dobro da carne.

$$p = 5 \times 2 \quad \rightarrow \quad Q = 250 \times 2$$

$$\text{Se } f(x_1) = kx_1 \; e \; f(x_2) = kx_2 \quad \text{então } f(x_1 + x_2) = kx_1 + kx_2$$

$$\text{Se } f(x) = kx \quad \text{então } f(ax) = a(kx) \quad \text{, sendo } k \neq 0$$

Regra de três simples e Percentagens

Proporção

Considera a seguinte situação: "Uma unidade hoteleira vendeu 1400 cafés numa semana, a diferentes clientes. Destes, 28 não ficaram satisfeitos com a qualidade do café que consumiram."

a) Qual o número de cafés vendidos, em média, em cada dia dessa semana?

$1400 \div 7$ ou $\frac{1400}{7}$ *representa um quociente, uma fração, uma razão.*

Diariamente, a unidade hoteleira, vendeu em média 200 cafés.

b) Qual a razão entre o número de clientes que não ficaram satisfeitos com o café e o número total de clientes que consumiram café?

$\frac{28}{1400}$ ou $\frac{14}{700}$ *ou* 0,02 *ou* 2% *(exemplos de diferentes formas de representar o mesmo número)*

c) Numa outra unidade hoteleira, dos 350 clientes que consumiram café durante uma semana, 7 não ficaram satisfeitos. A proporção de clientes insatisfeitos com o café consumido é equivalente nas duas unidades hoteleiras?

Observa que $\frac{7}{350}$ é equivalente a $\frac{28}{1400}$, isto é, $\frac{7}{350} = \frac{28}{1400}$

A razão entre 7 e 350 é igual à razão entre 28 e 1400, podendo ler-se "sete está para trezentos e cinquenta assim como vinte e oito está para mil e quatrocentos".

A igualdade entre duas razões é uma **proporção**.

Numa proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ verifica-se que $a \times d = b \times c$.

a e d são os extremos
b e c são os meios

Numa proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Regra de três simples

Se aplicares a propriedade das proporções acima descrita, podes determinar um meio ou um extremo, que falta numa proporção (regra de três simples).

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{40} \quad \rightarrow \quad x = \frac{3 \times 40}{5} = 24$$

Percentagens

Existem muitas situações do nosso quotidiano em que usamos expressões como "O tais timorense é feito em cem por cento algodão", "actualmente em percentagem do total das reservas cambiais mundiais, os dólares americanos representam 65% e os euros cerca de 20%", "cerca de 25% dos timorenses falam português", entre outras.

Em Timor-Leste, aproximadamente 63% da população tem idade compreendida entre os 15 e os 64 anos.

(Dados de Março de 2011, CIA World Factbook).

Qual o significado de 63%?

Em Março de 2011, Timor-Leste tinha um total de 1 177 834 habitantes, dos quais 736 642 tinham idades compreendidas entre os 15 e os 64.

Se o total da população fosse de 100 habitantes: $\frac{736642}{1177834} \times 100 = 63$ (arredondamento às unidades)

Então 63 pessoas, em cada 100, teriam idade compreendida entre 15 e 64 anos.

Uma **percentagem** é uma fração de denominador 100 (é a uma razão que indica o número de partes consideradas em cada cem) e traduz uma situação de proporcionalidade direta.

A fração $\frac{63}{100}$ pode ser representada por 63%, simplificando desta forma a escrita.

As percentagens são muito usadas na Economia e nas Finanças como forma de transmitir informação, calcular valores sujeitos a uma determinada percentagem de desconto ou de lucro ou avaliar resultados, entre outros.

Existem várias maneiras para calcular a percentagem de um valor. Por exemplo, para calcular 10% de 786 USD:

Determina-se o termo em falta da proporção

$$\frac{10}{100} = \frac{x}{786} \Leftrightarrow x = \frac{10 \times 786}{100} = \frac{7860}{100} = 78{,}6$$

Aplicação da regra de três simples.

Ou escreve-se 10% na forma de número decimal $\frac{10}{100} = 0{,}10$ e calcula-se o produto: $0{,}10 \times 786 = 78{,}6$

A resolução de problemas práticos que envolvem percentagens pode ser de três tipos, dependendo do número desconhecido que queremos determinar.

1) Numa turma de 40 alunos, a taxa de sucesso num trabalho para avaliação foi de 80%. Determina o número de alunos que teve um desempenho positivo neste trabalho.

$$\boxed{40} \xrightarrow{\text{x } 80} \boxed{?}$$

$40 \times 0{,}80 = 32$

ou

$$\frac{80}{100} = \frac{x}{40} \Leftrightarrow x = \frac{80 \times 40}{100} \Leftrightarrow x = 32$$

Então, 32 alunos tiveram desempenho positivo no trabalho.

2) Numa turma de 40 alunos, 26 tiveram uma avaliação positiva num trabalho para avaliação. Determina a taxa de sucesso.

$$\frac{26}{40} = 0{,}65$$

ou

$$\boxed{40} \xrightarrow{?} \boxed{26}$$

$$\frac{x}{100} = \frac{26}{40} \Leftrightarrow x = \frac{100 \times 26}{40} \Leftrightarrow x = 65$$

Então, a taxa de sucesso foi de 65%.

3) Numa turma, a taxa de sucesso num trabalho para avaliação foi de 95%, que corresponde a 38 alunos. Determina o número de alunos da turma.

$$\boxed{?} \xrightarrow{\times\, 0{,}95} \boxed{38}$$

$$\frac{95}{100} = \frac{38}{x} \Leftrightarrow x = \frac{100 \times 38}{95} \Leftrightarrow x = 40$$

Então, a turma é constituída por 40 alunos.

EXEMPLO RESOLVIDO 7

Uma empresa obteve, em 2010, um lucro de 15 000 USD. Determina o lucro desta empresa em 2011, sabendo que sofreu um decréscimo de 13% em relação ao ano anterior.

$$\frac{15000}{100} = \frac{x}{87} \Leftrightarrow x = 13050$$

Em 2011 a empresa obteve um lucro de 13 050 USD.

Se o lucro da empresa diminui 13%, o seu valor em 2011 corresponde a 87% do lucro do ano anterior.

No contexto económico, muitas informações são escritas em forma de taxas. Este valor pode ser expresso em forma de fração, percentagem ou permilagem. Neste domínio é útil a análise da taxa de desemprego, da taxa de inflação, da taxa de juro, da taxa de emigração, da taxa de investimento, da taxa de crescimento económico, entre outras.

	Taxa de natalidade em Timor-Leste (‰)
2006	26,29
2007	26,77
2008	26,52
2009	26,25

Fonte:https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/geos/tt.html

A taxa de natalidade calcula-se dividindo o número de nados vivos, num determinado período de tempo, por cada mil habitantes, sendo expressa em permilagem (‰).

EXEMPLO RESOLVIDO 8

Determina a taxa de natalidade de um país em 2001, sabendo que nesse ano nasceram 112825 crianças e a população era constituída por um total de 10355824 indivíduos.

Como esta taxa é a razão entre o número de nados vivos por cada 1000 habitantes,

$$\frac{112825}{10355824} = \frac{x}{1000} \Leftrightarrow x = 10{,}89$$

Em 2001, este país teve uma taxa de natalidade de 10,89 ‰ .

TAREFA 4:

1. Um habitante de Ossu quer vender a sua casa por 85 000,00 USD. Para tal, consultou duas agências imobiliárias A e B, uma com 2% de comissão e outra com 1,8% de comissão sobre o valor da venda, respetivamente.

a) Calcula o valor da comissão de cada agência, em USD;

b) Calcula o valor que o proprietário obtém com a venda da casa na agência A;

c) Calcula o valor que o proprietário obtém com a venda da casa na agência B.

2. Um agente de máquinas industriais recebeu uma máquina cujo custo era de 1160,00 USD. No dia seguinte recebeu indicação para aumentar o custo da máquina em 8%. Como a máquina não foi vendida no prazo previsto, recebeu de novo uma indicação para baixar o preço em 8%. Quanto custa, agora, a máquina?

3. Numa sapataria uns pares de sapatos estão marcados a 43,68 USD. Quanto custaram os sapatos ao dono da sapataria, sabendo que este marca os produtos com 70% de lucro?

4. Uma funcionária de uma empresa ganha 300 USD por mês e está interessada num novo emprego. Uma empresa propôs-lhe 360 USD e outra 405 USD mensais. Calcula a percentagem de aumento de ordenado que esta funcionária obteria em cada uma das propostas.

5. Calcula a percentagem de desconto de um bem que custava 30,50 USD e agora custa 26,23 USD.

6. Um bem custa 128,80 USD, com desconto. Sem desconto o bem custava 140 USD. Determina a percentagem de desconto.

7. Com 28% de desconto um livro custa 9,18 USD. Determina o preço do livro sem desconto.

Proporcionalidade inversa

Para além da relação linear entre duas variáveis (proporcionalidade direta), existe outro tipo de proporcionalidade.

Considera a seguinte situação:

"Para se deslocar com o seu automóvel do Aeroporto Internacional Presidente Nicolau Lobato para a Universidade Nacional de Timor-Leste, um indivíduo demora 12 minutos a uma velocidade de 36 km/h."

a) Determina a distância entre o Aeroporto e a Universidade.

Começamos por converter 12 minutos em horas: $\frac{12}{60} = 0{,}2$ *, 12 minutos são 0,2h*

0,2 x 36 = 7,2

Então, a distância entre o Aeroporto e a Universidade é de 7,2 km.

b) Se a viagem for realizada de taxi, a 24 km/h, quanto tempo demorará a fazer o mesmo percurso?

$$\frac{0{,}2 \times 36}{24} = \frac{7{,}2}{24} = 0{,}3\ h$$

0,3 x 60 = 18 minutos

Então, a 24 km/h, a viagem é realizada em 18 minutos.

c) Completa a tabela, determinando ***a*** e ***b***

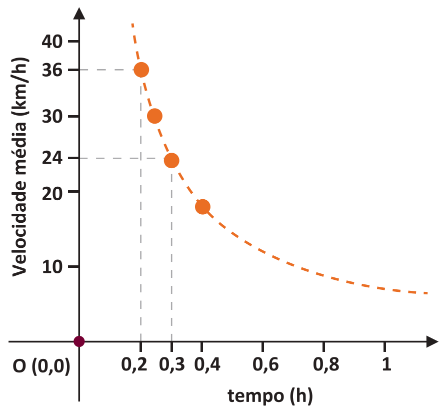
$$\boldsymbol{a} = \frac{0{,}2 \times 36}{18} = \frac{7{,}2}{18} = 0{,}4\ h \quad e \quad \boldsymbol{b} = \frac{0{,}2 \times 36}{0{,}24} = \frac{7{,}2}{0{,}24} = 30\ km/h$$

Quantidade (t em horas)	0,24	a	0,3	0,2
Velocidade média (v em km/h)	b	18	24	36

d) Escreve uma fórmula geral que relacione a velocidade, em Km/h com a distância, em Km, e com o tempo em horas.

$$\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{v} = 7{,}2 \quad ou \quad \boldsymbol{v} = \frac{7{,}2}{\boldsymbol{t}}$$

e) Representa graficamente os pontos da tabela



Duas grandezas, x e y, são **inversamente proporcionais** se o produto entre os valores correspondentes é constante (e diferente de zero).

$\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}$ ou $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{k} \neq 0$, sendo ***k*** a constante de proporcionalidade e $x \neq 0$

Todos os pontos do gráfico deste tipo de correspondência estão sobre uma curva, denominada **hipérbole**.

TAREFA 5:

Sabendo que, no dia 6 de Setembro de 2011, a relação entre o valor em dólares, $\boldsymbol{d}$, e o correspondente em euros, $\boldsymbol{e}$, é a seguinte: $\boldsymbol{d} = 1{,}4 \times \boldsymbol{e}$

a) Entre as grandezas ***d*** e ***e*** existe algum tipo de proporcionalidade? Justifica.

b) Copia para o teu caderno a tabela seguinte e completa-a.

e (EUR)	3		42,18		
d (USD)		32,50		9,89	14,1

c) Indica a constante de proporcionalidade e o seu significado, no contexto da situação.

1.4 Sistemas de duas equações com duas incógnitas

Já estudaste anteriormente como equacionar e resolver um problema do 1º grau com uma incógnita.

E quando existem duas informações sobre dois valores desconhecidos?

Por exemplo, um agricultor vende bananas e abacates. Para escrevermos a fórmula que permite calcular o custo total de 5 caixas de bananas e 2 caixas de abacates, podemos proceder da seguinte forma:

> *Seja x o custo de cada caixa de bananas e y o custo de cada caixa de abacates.*
>
> *Então, temos a fórmula que nos dá o custo total,* $C = 5x + 2y$

Esta fórmula é uma expressão matemática que relaciona as **variáveis** x e y.

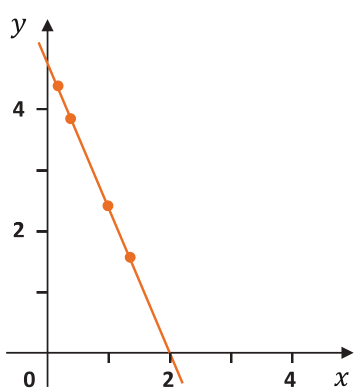
Se soubermos o valor do custo total (por exemplo, 10 USD), podemos escrever $5x + 2y = 10$.

Esta equação é do 1º grau e tem duas incógnitas, x e y (com $x \neq 0$ e $y \neq 0$) e relaciona o custo de uma caixa de bananas com o custo de uma caixa de abacates, conhecendo o custo total. Podemos resolver esta equação em ordem a uma das incógnitas, por exemplo, em ordem a e representá-la graficamente.

$$5x + 2y = 10 \Leftrightarrow 2y = 10 - 5x \Leftrightarrow y = \frac{10 - 5x}{2}$$

Para a representação gráfica é necessário conhecermos as coordenadas de alguns pontos:

Valor de x Custo de caixa de bananas (abcissa)	Valor de y Custo de uma caixa de toranjas (ordenada)	Ponto (x, y) (coordenadas)
$x = 0{,}20$	$y = \frac{10 - 5 \times 0{,}20}{2} = 4{,}5$	$A = (0{,}20\,;4{,}5)$
$x = 0{,}50$	$y = \frac{10 - 5 \times 0{,}50}{2} = 3{,}75$	$B = (0{,}50\,;3{,}75)$
$x = 1$	$y = \frac{10 - 5 \times 1}{2} = 2{,}5$	$C = (1\,;2{,}5)$
$x = 1{,}4$	$y = \frac{10 - 5 \times 1{,}4}{2} = 1{,}5$	$D = (1{,}4\,;1{,}5)$



Os pontos estão sobre uma **reta**. Para representar este tipo de equação basta conhecer **dois** dos seus pontos.

Considera agora a mesma situação, com o acréscimo de mais uma informação.

Determina o custo de cada caixa de bananas e o custo de cada caixa de abacates, sabendo que 5 caixas de bananas e 2 caixas de abacates custam 10 USD e 1 caixa de bananas e 4 caixas de abacates custam 12,8 USD.

A primeira informação pode ser traduzida pela equação $5\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 10$.

A segunda informação pode ser traduzida pela equação $\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} = 12{,}8$.

Então sabemos que $5\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 10$ *e* $\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} = 12{,}8$.

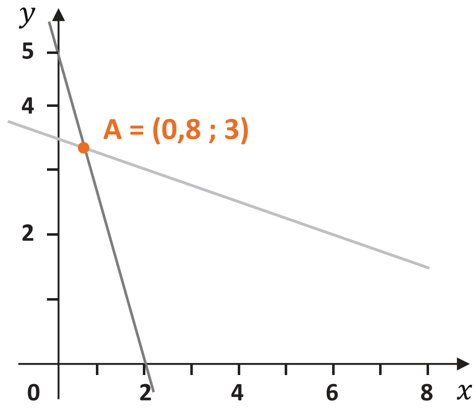
A conjunção destas duas condições pode escrever-se sob a forma de um **sistema de duas equações lineares**:

$$\begin{cases} 5\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 10 \\ \boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} = 12{,}8 \end{cases}$$

A solução deste sistema é todo o par ordenado (x , y) que satisfaz simultaneamente as duas condições. Existem vários métodos para resolver sistemas de equações. Iremos aplicar um deles, o **método de substituição**.

Escreve-se o sistema na forma canónica $\begin{cases} \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}'\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}' \end{cases}$ Onde ***a***, ***b***, ***c***, e ***a'***, ***b'***, ***c'*** são números reais	$\begin{cases} 5\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 10 \\ \boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} = 12{,}8 \end{cases}$
Resolve-se uma das equações em ordem a uma das incógnitas, por exemplo em ordem a x	$\begin{cases} 5\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 10 \\ \boldsymbol{x} = 12{,}8 - 4\boldsymbol{y} \end{cases}$
Substitui-se, na outra equação, x pela expressão obtida e determina-se o valor de y	$\begin{cases} 5(12{,}8 - 4\boldsymbol{y}) + 2\boldsymbol{y} = 10 \\ \boldsymbol{x} = 12{,}8 - 4\boldsymbol{y} \end{cases}$ $\begin{cases} 64 - 20\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{y} = 10 \\ \boldsymbol{x} = 12{,}8 - 4\boldsymbol{y} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{y} = 3 \\ \boldsymbol{x} = 12{,}8 - 4\boldsymbol{y} \end{cases}$
Substitui-se o valor de y na outra equação e determina-se o valor de x	$\begin{cases} \boldsymbol{y} = 3 \\ \boldsymbol{x} = 12{,}8 - 4 \times 3 \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{y} = 3 \\ \boldsymbol{x} = 0{,}8 \end{cases}$
Solução: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (0{,}8\,;3)$	

Então, cada caixa de bananas custa **0,80** USD e cada caixa de abacates custa **3** USD.



Além da resolução analítica também podemos resolver o sistema graficamente. Cada condição pode ser representada graficamente através de uma reta, a solução, caso exista, será dada pelas coordenadas do ponto de interseção dessas duas retas.

TAREFA 6:

1. Resolve as seguintes equações em ordem a :

a) $12x - 15y = 11$

b) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6}$

c) $1 - \frac{x+y}{2} = 3$

d) $8x = 4(x - y)$

2. Resolve os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} -3x = 2 - y \\ 2y + 3 = 6x \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 6y = y + 204 \\ 6\left(\frac{y}{4} - x\right) - \frac{3y}{2} = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{-x + y}{4} = \frac{y}{12} \\ \frac{5}{2}(20 - x) + \frac{1}{2}y = 15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -18 = 2x + 10y \\ \frac{x + 5}{5} = -5y \end{cases}$

3. Verifica se o par ordenado (x , y) = (2 , 3) é solução do seguinte sistema:

a) $\begin{cases} 7x + 14y = 56 \\ -7y + 35x = 49 \end{cases}.$

2. Análise de dados

As pessoas são confrontadas diariamente com informação estatística, nomeadamente nas áreas da Economia, Política, Indústria, Comércio, Demografia, Sociologia, Biologia e Medicina, entre outras.

A Estatística é uma ciência que trata dados, tornando-se o seu estudo essencial na formação de cidadãos informados (participando de forma consciente na vida social), consumidores inteligentes e profissionais competentes. Num mundo em constante desenvolvimento, com uma forte concorrência comercial, política e social, recorre-se a diversas formas de divulgação de informação, influenciando muitas vezes a perceção da realidade. Desta forma, é essencial saber ler e interpretar as diversas formas de apresentação de dados estatísticos.

2.1 Conceitos básicos

EXEMPLO RESOLVIDO 1

Um professor realizou um estudo estatístico sobre as preferências de leitura numa escola com 800 alunos. Para isso inquiriu 300 alunos dessa escola.

População: conjunto de todos os alunos da escola.

Amostra:
conjunto dos 300 alunos da escola inquiridos.

Unidade estatística: cada aluno da escola.

Variável estatística: preferência de leitura.

Efetivo da população: 800 alunos.

População - Conjunto de elementos, que podem ser pessoas, animais ou resultados experimentais, com uma ou mais características em comum, que se pretendem analisar.

Amostra – Subconjunto finito da população. Uma amostra deve representar convenientemente a população de onde os dados foram recolhidos.

Variável estatística – É uma característica de um indivíduo ou objeto à qual se possa atribuir um número ou uma categoria.

Efetivo da população – É o número de elementos da população.

Uma variável estatística pode ser classificada. Por exemplo, a variável “preferência de leitura” é **qualitativa** porque não é suscetível de contagem ou medição.

Quando os dados se podem traduzir numericamente a variável é **quantitativa**. Dentro destas últimas distinguem-se as variáveis quantitativas **discretas** (que se podem contar e tomam valores isolados) e as variáveis quantitativas **contínuas** (que se podem medir e podem assumir qualquer valor de um dado intervalo).

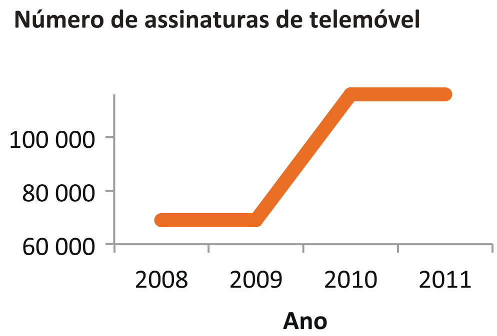
Em síntese:

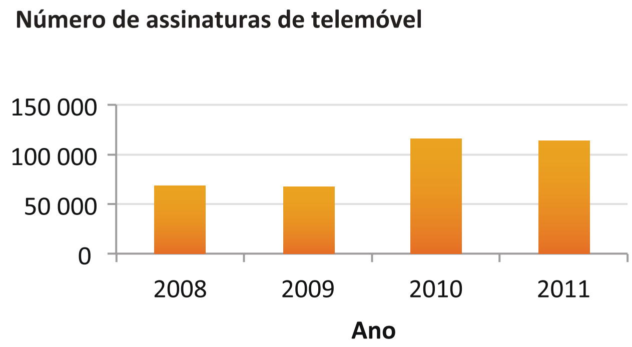
- **Variáveis**
  - Qualitativas
  - Quantitativas
    - Discretas
    - Contínuas

2.2 Leitura e interpretação de tabelas e gráficos Estatísticos

Para promover a discussão e comunicação das opiniões dos cidadãos em relação à informação estatística disponível é necessário que, primeiro, estes desenvolvam a capacidade de a interpretar e avaliar criticamente. A interpretação requer a capacidade de leitura da informação traduzida por textos escritos, números e símbolos ou gráficos e tabelas.

Em qual dos gráficos está representado um aumento mais significativo do número de assinaturas de telemóveis?





Dados: http://www.indexmundi.com

Estes dois gráficos estatísticos são ambos representativos dos mesmos dados. Como foi alterada a escala e o tipo de gráfico, o leitor pode ser induzido a formar a opinião de que o primeiro gráfico traduz uma situação de um aumento mais acentuado do número de telemóveis em Timor-Leste de 2009 para 2010.

EXEMPLO RESOLVIDO 2

Observa o seguinte gráfico referente ao peso médio anual (%) de 2008 para os grupos de produtos do Índice de preços ao consumidor.

Fonte: DNE Timor-Leste

a) Identifica os grupos de produtos do IPC com peso médio anual acima dos 6,5%.

Os grupos de produtos do IPC com peso médio anual acima dos 6,5% são: habitação, água, eletricidade e combustíveis; vestuário e calçado e alimentos e bebidas não-alcoólicas.

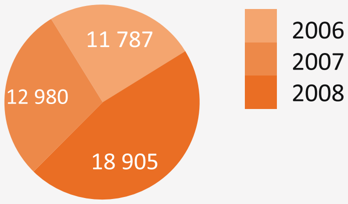
b) Determina a diferença percentual entre o grupo “Educação e lazer” e “Vestuário e calçado”.

$$7{,}7 - 2{,}8 = 4{,}9$$

A diferença percentual é de 4,9%.

TAREFA 1:

1. Num comunicado de imprensa a 26 de Novembro de 2009, o Secretário de Estado do Conselho de Ministros divulgou os seguintes dados referentes ao número de turistas em Timor-Leste.



a) Identifica a variável em estudo;

b) Determina, em percentagem, o aumento de turistas de 2007 para 2008.

2. Numa escola existem as seguintes atividades desportivas: futebol, basquetebol, ginástica, atletismo, xadrez e voleibol. Fez-se um inquérito a todos os alunos de 10º, 11º e 12º, com a seguinte pergunta: "Qual destes desportos praticas?". Os resultados estão registados na tabela seguinte:

a) Determina:

a.1) o total de alunos que frequentam o 10º, 11º e 12º ano;

a.2) a percentagem de alunos praticam xadrez;

a.3) a percentagem de raparigas que respon-deram ao inquérito;

a.4) o número de alunos que praticam basquetebol e são raparigas;

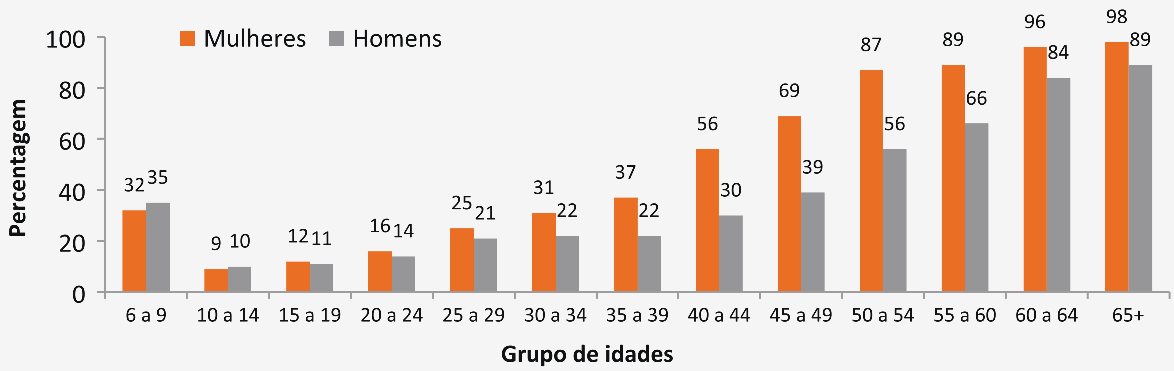
a.5) o número de alunos do 11º Ano que praticam Futebol ou Ginástica.

b) Como evolui a participação das raparigas na modalidade Ginástica ao longo dos três anos?

c) Elabora um pequeno texto comparando a participação por género (masculino/ feminino) em cada desporto.

3. Considera o seguinte gráfico de barras.

Percentagem de mulheres e homens sem educação escolar



Timor-Leste Demographic and Health Survey 2009-10 / National Statistics Directorate of the Ministry of Finance

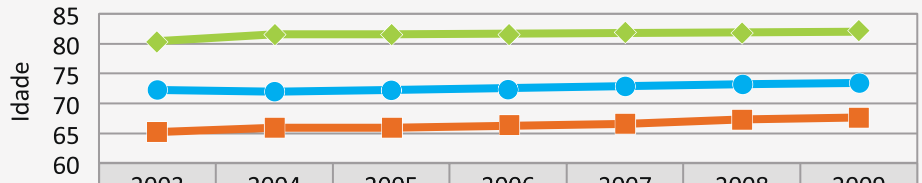
a) Indica a diferença percentual entre homens e mulheres sem escolaridade, com idades compreendidas entre os 40 e os 44 anos.

b) Indica o intervalo de idades no qual a diferença percentual entre homens e mulheres sem escolaridade é mais acentuada.

c) Indica os intervalos de idades onde a percentagem de mulheres sem escolaridade é inferior à percentagem de homens sem escolaridade.

4. Considera o seguinte gráfico de linhas.

Esperança média de vida



	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
China	72,22	71,96	72,27	72,58	72,88	73,18	73,47
Timor-Leste	65,2	65,9	65,9	66,26	66,6	67,27	67,61
Singapura	80,42	81,62	81,62	81,71	81,8	81,89	81,98

Fonte: www.cia.gov

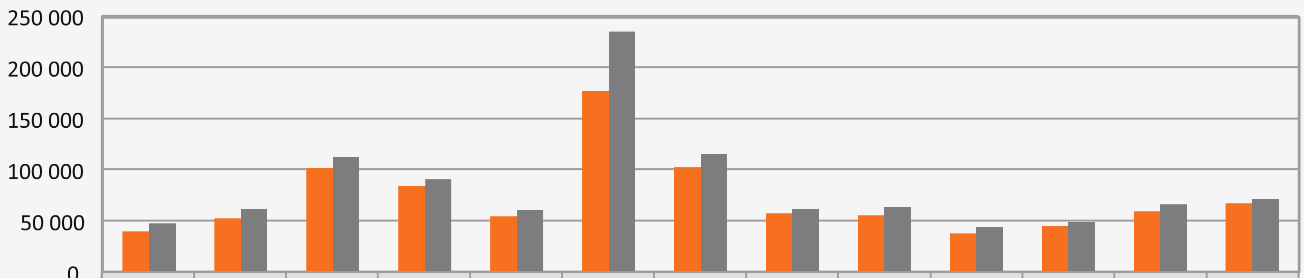
a) Em relação a 2008, indica a esperança média de vida nos três países referidos.

b) Indica a diferença, em anos, da esperança média de vida entre Timor Leste e Singapura no ano de 2006.

c) Calcula o aumento percentual da esperança média de vida em Timor Leste de 2003 a 2009.

5. Considera o seguinte gráfico de barras.

Distribuição da população por distrito, 2004 e 2010



	Aileu	Ainaro	Baucau	Bobonaro	Covalima	Dili	Ermera	Lautem	Liquica	Manatuto	Manufahi	Oecusse	Viqueque
2004	37967	52480	100748	83579	53063	175730	103322	56293	54973	36897	45081	57616	65449
2010	45512	59382	111484	89787	60063	234331	114635	60218	63329	43246	48894	65524	70177

Fonte: Population and Housing Census 2010 Preliminary Results., DNE

a) Indica o distrito onde se registou um crescimento populacional mais acentuado de 2004 a 2010;

b) Identifica o distrito onde se registou um aumento menos acentuado da população entre 2004 e 2010;

c) Dá exemplo de dois distritos que, em 2010, representavam entre 5% e 10% da população de Timor Leste, sabendo que a população total era de 1 066 582 indivíduos.

2.3 Organização e representação de dados

Uma das fases de um estudo estatístico é a organização dos dados recolhidos. O uso de tabelas e gráficos facilita a leitura da informação recolhida.

Como vimos anteriormente, as variáveis estatísticas podem classificar-se em qualitativas, quantitativas discretas e quantitativas contínuas. Estudaremos a organização e representação de cada um destes tipos de dados.

Dados qualitativos

Considera os dados relativos à prática desportiva dos 60 rapazes do 10º Ano de uma escola.

F	X	X	F	N	F	G	X	N	A
X	V	B	G	B	N	F	B	N	X
B	N	N	N	B	F	F	V	N	B
N	G	X	N	N	F	B	N	X	B
N	F	N	X	N	F	N	A	F	V
N	N	F	N	F	V	X	B	N	B

F - Futebol	X - Xadrez
B - Basquetebol	V - Voleibol
G - Ginástica	N - Nenhum
A - Atletismo	

	10º Ano
Futebol	12
Basquetebol	10
Ginástica	3
Atletismo	2
Xadrez	9
Voleibol	4
Nenhum	20

Como representar os dados de forma a simplificar a sua leitura e análise? Nesta tabela de frequências absolutas são registadas as modalidades na primeira coluna e o número de alunos que as praticam na segunda.

Esta tabela pode ser completada com o cálculo das frequências relativas e das frequências relativas em percentagem.

O efetivo da população é 60, ou seja, é a soma dos valores de f_i quando o índice i varia desde 1 até K.

Modalidades	Frequência absoluta (f_i)	Frequência relativa (fr_i)	Frequência relativa em % (f_{ri}%)
Futebol	12	$\frac{12}{60} = 0{,}20$	12
Basquetebol	10	$\frac{10}{60} \simeq 0{,}17$	17
Ginástica	3	$\frac{3}{60} = 0{,}05$	5
Atletismo	2	$\frac{2}{60} \simeq 0{,}03$	3
Xadrez	9	$\frac{9}{60} = 0{,}15$	15
Voleibol	4	$\frac{4}{60} \simeq 0{,}07$	7
Nenhum	20	$\frac{20}{60} \simeq 0{,}33$	33
Total	60	1	100

Pode-se escrever $\sum_{i=1}^{k} f_i$ (somatório de índice i dos valores de f_i, quando i varia de 1 até k).

Por exemplo, $\sum_{i=1}^{4} f_i = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 12 + 10 + 3 + 2 = 27$

Frequência absoluta (f_i) de um valor da variável é o número de vezes que esse valor foi observado.

Frequência relativa (fr_i) de um valor da variável é o quociente entre a frequência absoluta desse valor da variável e o número total de observações, n.

A distribuição de dados acima descritos também pode ser apresentada graficamente através de um:

Gráfico de barras

Representa-se no eixo horizontal os dados estatísticos e no eixo vertical as frequências absolutas ou relativas.

As barras têm todas a mesma largura.

Prática desportiva dos rapazes do 10º Ano de uma escola

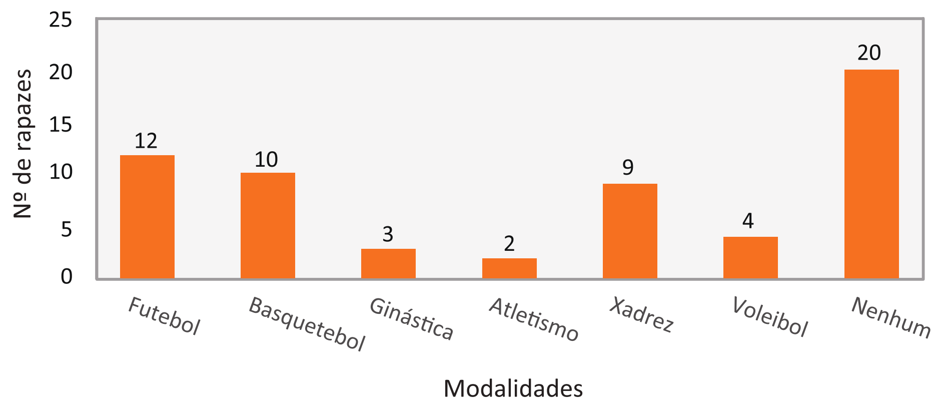


Diagrama circular

Uma outra forma de representar esta informação é através de um diagrama circular, que tem a forma de um círculo constituído por tantos setores circulares quantas as categorias que constam na tabela de frequências. A amplitude de cada setor circular é diretamente proporcional à frequência (absoluta ou relativa) da categoria que representa. Assim temos, por exemplo, a amplitude do setor circular correspondente à modalidade Futebol:

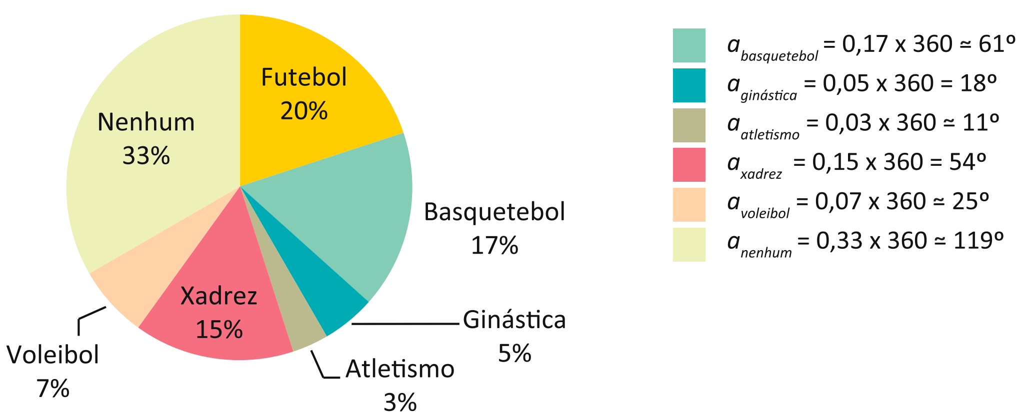
$$\frac{a}{360º} = \frac{12}{60} \Leftrightarrow a = \frac{12 \times 360}{60} = \frac{12}{60} \times 360 = 0{,}20 \times 360 = 72º$$

Como a frequência relativa da modalidade futebol é 0,20 temos:

Amplitude do ângulo: $fr_i \times 360^o$

Com o auxílio de régua e transferidor podemos construir o diagrama circular que traduz a informação da tabela dada.

Prática desportiva dos rapazes do 10º Ano de uma escola



Dados quantitativos discretos

As classificações (numa escala de 0 a 20) do último trabalho dos alunos de uma turma na disciplina de Economia e Métodos Quantitativos foram as seguintes:

15	8	12	9	15	10
8	10	15	9	17	12
15	9	10	15	9	8
12	8	12	12	10	9
15	8	9	10	12	9
10	12	10	17	12	17

Classificação	Nº de alunos
8	5
9	7
10	7
12	8
15	6
17	3

Como representar os dados de forma a simplificar a sua leitura e análise? Nesta tabela de frequências absolutas registam-se as classificações na primeira coluna e o número de alunos que as obtiveram na segunda.

Esta tabela pode ser completada com o cálculo das frequências relativas e das frequências absolutas e relativas acumuladas.

Classificações	Frequência absoluta (f_i)	Frequência relativa (fr_i)	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa acumulada
8	5	$\frac{5}{36} \simeq 0{,}139$	5	0,139
9	7	$\frac{7}{36} \simeq 0{,}194$	12 (5+7)	0,333 (0,139+0,194)
10	7	$\frac{7}{36} \simeq 0{,}194$	19 (12+7)	0,527 (0,333+0,194)
12	8	$\frac{8}{36} \simeq 0{,}222$	27 (19+8)	0,749 (0,527+0,222)
15	6	$\frac{6}{36} \simeq 0{,}167$	33 (27+3)	0,916 (0,749+0,167)
17	3	$\frac{3}{36} \simeq 0{,}083$	36 (33+3)	0,999 (0,916+0,083)
Total	36	$\simeq 1$		

Frequência absoluta acumulada (F_i):
obtêm-se adicionando as frequências absolutas até ao valor considerado da variável.

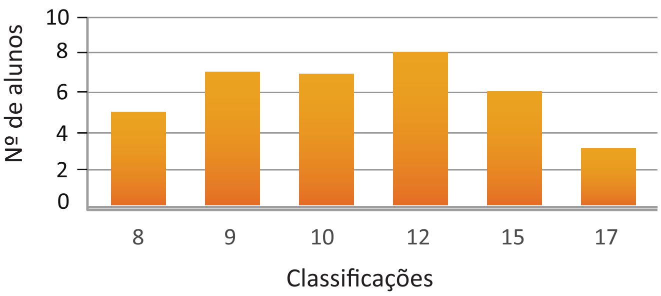
Frequência relativa acumulada (Fr_i):
obtêm-se adicionando as frequências relativas até ao valor considerado da variável.

Os gráficos usualmente construídos para este tipo de variáveis são:

Gráfico de barras das frequências absolutas

Desenha-se uma barra para cada classificação. O comprimento de cada barra depende do número de alunos que tem a nota em causa. A largura das barras mantem-se constante e as barras não são adjancentes.

Classificação de um trabalho dos alunos de EMQ



Classificação de um trabalho dos alunos de EMQ

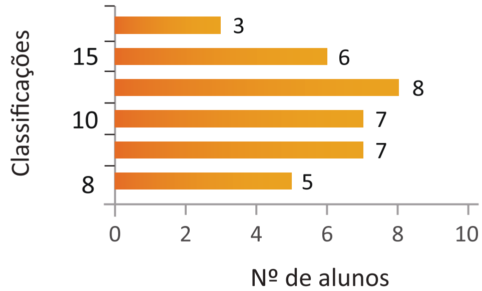
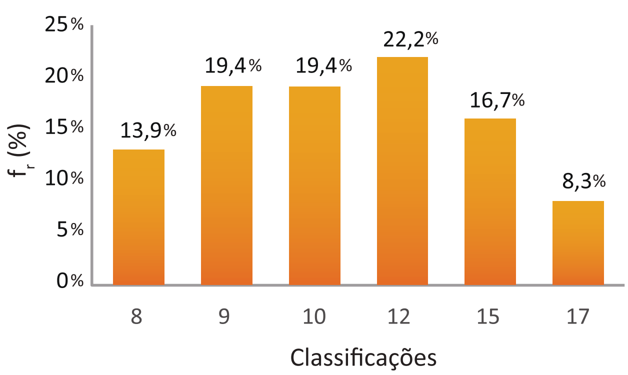


Gráfico de barras das frequências relativas (simples ou acumuladas), em percentagens

No eixo horizontal estão os valores das diferentes classificações observadas e no eixo vertical as correspondentes frequências relativas (simples ou acumuladas), em percentagem.

Classificação de um trabalho dos alunos de EMQ



Classificação de um trabalho dos alunos de EMQ

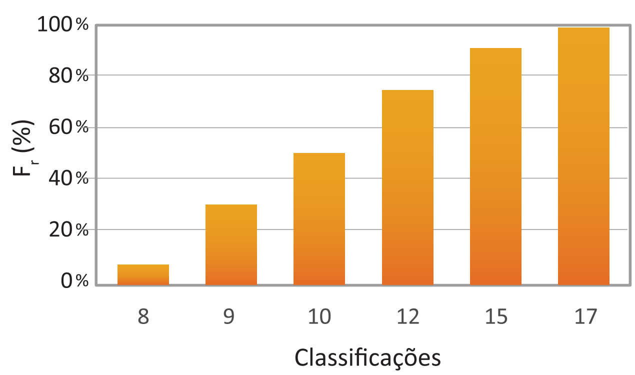
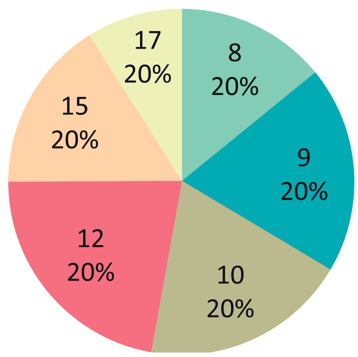


Diagrama circular

Como vimos anteriormente, é necessário calcular a amplitude do ângulo de cada setor circular para, com o auxílio de uma régua e de um transferidor, construir o diagrama circular com a informação da tabela.

Classificação de um trabalho dos alunos de EMQ

- $a_8 = 0{,}14 \times 360 \simeq 50°$
- $a_9 = 0{,}20 \times 360 = 72°$
- $a_{10} = 0{,}19 \times 360 \simeq 68°$
- $a_{12} = 0{,}22 \times 360 = 79°$
- $a_{15} = 0{,}17 \times 360 \simeq 61°$
- $a_{17} = 0{,}08 \times 360 \simeq 29°$



Dados quantitativos contínuos

Considera os comprimentos, em metros, de vários cetáceos registados perto da costa de um país.

4,1	12	20	15,6	2,8	11,4	30
2,9	3,5	8	3,4	13	10,8	2,5
2,6	21	3,7	11,2	6,7	5,2	9,3

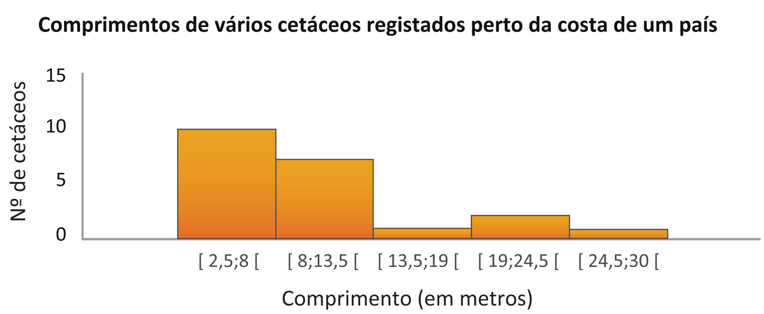
Qual o número de classes a considerar? E a sua dimensão?

Apesar de existem vários métodos para chegar a esses valores, iremos aplicar a seguinte regra empírica:

1º Passo: Procurar o menor número inteiro que satisfaz a condição $2^k \geq n$ onde *k* é o número de classes e *n* a dimensão da amostra	Como $n = 21$, temos $k = 5$ $2^5 \geq 21$
2º Passo: Calcular a amplitude amostral $A = x_n - x_1$ Onde x_1 é o valor mínimo e x_n é o valor máximo das observações	$A = 30 - 2,5 = 27,5$
3º Passo: Calcular a amplitude de cada classe: quociente entre a amplitude amostral e o número de classes.	Amplitude de cada classe: $\frac{27,5}{5} = 5,5$
Então os dados observados podem ser organizados em **5 classes** de **amplitude 5,5**.	

Comprimentos (metros)	Frequência absoluta (f_i)	Frequência relativa (fr_i)	Frequência absoluta acumulada (F_i)	Frequência relativa acumulada (Fr_i)
[2,5 ; 8 [	10	0,476	10	47,6
[8 ; 13,5 [	7	0,333	17	80,9
[13,5 ; 19 [	1	0,048	18	85,7
[19 ; 24,5 [	2	0,095	20	95,3
[24,5 ; 30 [	1	0,048	21	100
Total	21	1		

O gráfico mais usado para representar as variáveis quantitativas contínuas é o histograma. Este é constituído por retângulos unidos entre si cuja base é a amplitude da classe e a altura é proporcional à sua frequência. O histograma deve ter um título que sugere a informação que pretende transmitir. Distingue-se do gráfico de barras pelo fato das suas barras serem adjacentes (não têm intervalos entre si).



Da observação do gráfico podemos concluir que:

- Existe uma grande concentração de valores entre os 2 metros e os 13,5 metros, o que significa que a maioria dos comprimentos dos cetáceos registados pertence a este intervalo;
- Na amostra recolhida existe apenas um cetáceo com comprimento superior a 24,5 metros;
- A classe com maior frequência é a classe que contém os comprimentos entre 2,5 e 8 metros.

Para comparar distribuições é útil conhecer valores que sejam representativos de cada classe.

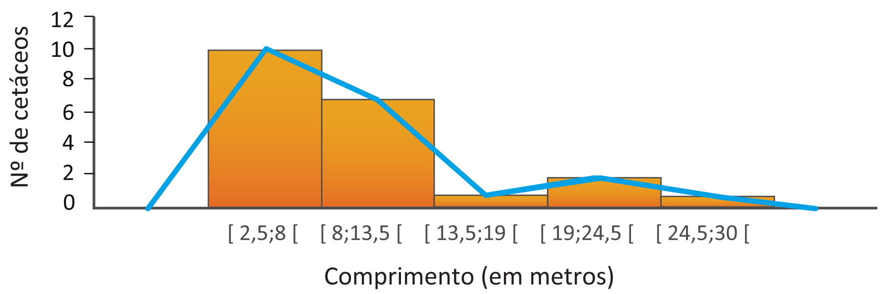
Esse número corresponde ao seu valor central da classe e é designado por **marca ou centro da classe**.

A marca da classe [a ; b [é o valor $\frac{a+b}{2}$

Classificações	Marca da classe
[2,5 ; 8 [	5,25
[8 ; 13,5 [	10,75
[13,5 ; 19 [	16,25
[19 ; 24,5 [	21,75
[24,5 ; 30 [	27,25

O polígono de frequências absolutas é obtido unindo sequencialmente com segmentos de reta os pontos médios dos lados superiores dos retângulos (marcas das classes).

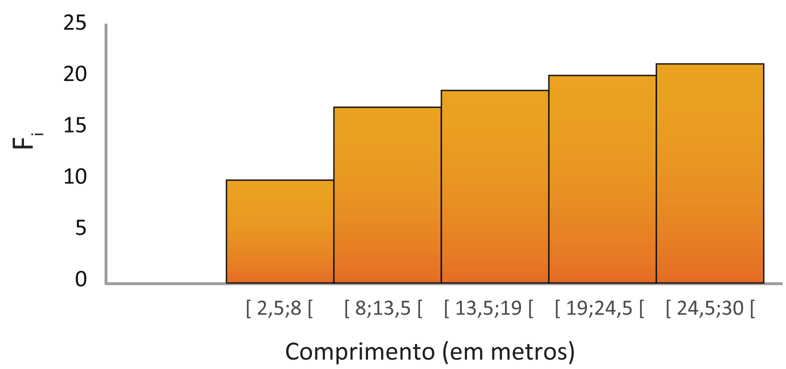
Comprimentos de vários cetáceos registados perto da costa de um país



A área do polígono limitado por esta linha e pelo eixo horizontal é igual à soma das áreas dos retângulos que constituem o histograma.

Em alguns é útil a construção do **histograma de frequências acumuladas**.

Comprimentos de vários cetáceos registados perto da costa de um país



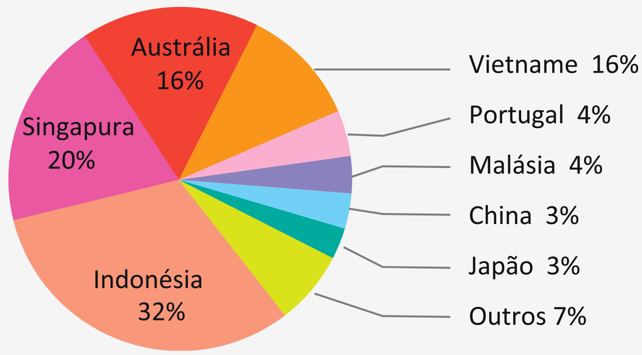
TAREFA 2:

1. Considera o seguinte gráfico circular correspondente à estrutura das importações em Timor Leste nos primeiros 8 meses de 2009.

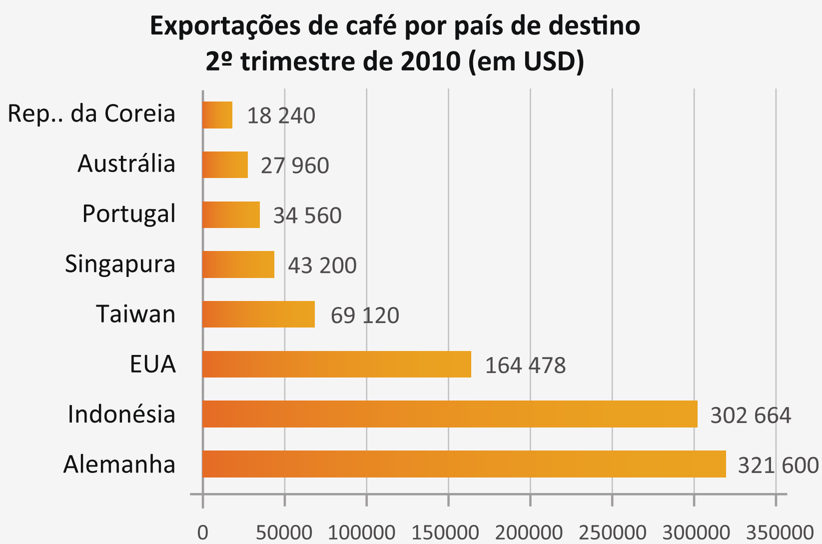
a) Determina a amplitude do ângulo de cada setor circular do gráfico.

b) Qual a diferença percentual entre as importações provenientes da China e de Singapura, nos primeiros oito meses de 2008?

c) Constrói o gráfico de barras de frequências relativas com base nos dados do gráfico circular.



2. Considera o seguinte gráfico de barras referente às exportações de café de Timor Leste, no 2º trimestre de 2010, em USD.



(Fonte: DNE-INDICADORES ESTATÍSTI-COS TRIMESTRAIS 2ºTrimestre 2010)

a) Indica o país para o qual Timor-Leste exportou mais café no 2º trimestre de 2010.

b) Constrói a tabela de frequências absolutas e relativas referentes às exportações de café neste período.

c) Indica a percentagem de exportações de café em USD, neste período, para os EUA.

d) Constrói o diagrama circular que represente a informação dada neste gráfico de barras.

3. Em Janeiro foi inaugurada uma sala de cinema. Na tabela seguinte estão registadas as **frequências acumuladas** do número de bilhetes vendidos na primeira semana de abertura ao público.

a) Quantos bilhetes foram vendidos nessa semana?

b) Quantos bilhetes foram vendidos no Sábado?

c) A sala de cinema esteve encerrada num dos dias. Em qual?

d) Em que dia foram vendidos mais bilhetes?

Dias da semana	Número de bilhetes vendidos (f_i)
2ª feira	80
3ª feira	150
4ª feira	150
5ª feira	200
6ª feira	230
Sábado	260
Domingo	280

e) Calcula a percentagem de bilhetes vendidos na 5ª feira.

f) Constrói o gráfico de barras com o valor das frequências relativas em percentagem e o respetivo polígono de frequências.

g) Constrói um diagrama circular com a informação da tabela.

4. Foram registadas as temperaturas máximas num determinado mês em Timor-Leste, em graus Celsius.

27	29	27	30	30	27	26	27	26	31
29	29	27	29	30	26	26	29	30	30
26	26	29	27	27	29	31	31	30	26

a) Identifica a variável em estudo e classifica-a.

b) Organiza os dados desta distribuição numa tabela de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas.

c) Em quantos dias deste mês a temperatura foi de, pelo menos, 29°C?

d) Calcula a percentagem de dias deste mês nos quais a temperatura foi inferior a 28°C.

e) Constrói o polígono de frequências.

f) Constrói o diagrama circular das frequências relativas, em percentagem.

5. A seguir apresentam-se os salários mensais dos funcionários de uma empresa, em USD.

100	120	110	230	420	115
230	470	100	380	250	120
160	490	350	190	120	100

a) Quantos funcionários tem a empresa?

b) Identifica a variável em estudo e classifica-a.

c) Organiza os dados numa tabela de frequências absolutas e relativas. Para determinares o número de classes aplica a regra empírica referida anteriormente.

d) Constrói o histograma de frequências absolutas.

e) A qual das classes pertence um número mais elevado de salários?

f) Constrói um histograma de frequências relativas acumuladas em percentagem.

g) Elabora um texto com uma análise e interpretação dos dados recolhidos.

2.4 Medidas de localização

As medidas de localização que estudaremos são a média, a moda e mediana.

Além destas medidas existem outras que são os quantis, dos quais estudaremos apenas os quartis.

O seu cálculo permite resumir a informação e determinar características da distribuição de dados.

Como este estudo já foi iniciado em anos anteriores, considera os exemplos que serão resolvidos e, de seguida, resolve as tarefas propostas.

EXEMPLO 1 (dados não agrupados)

Considera os dados relativos ao número de pessoas registadas à procura de emprego do terceiro trimestre de 2008 ao segunto trimestre de 2010.

487   331   456   226   291   149   292   133

A **média** de pessoas registadas por trimestre calcula-se da seguinte forma:

Média aritmética: $\bar{x} = \dfrac{487+331+456+226+291+149+292+133}{8} = \dfrac{2365}{8} \approx 296$

Então, neste período, registaram-se em média 296 pessoas por trimestre, aproximadamente.

Se tivermos N dados $x_1, x_2, \ldots, x_N$, então a média aritmética é igual a:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Simbolicamente a média pode escrever-se da seguinte forma: $\bar{x}$

Nota: a média é uma medida influenciada por qualquer alteração num dos valores observados.

Como a **mediana** é o valor que ocupa o lugar central da distribuição quando os valores da variável estão ordenados por ordem crescente ou decrescente, o primeiro passo para a localizar é ordenar os dados.

133   149   226   291   292   331 456   487

No caso do número de dados ser ímpar, a mediana corresponde ao valor central (que é um dos dados da distribuição). No caso do número de dados ser par, toma-se os dois valores centrais e a mediana corresponde à sua média aritmética.

133   149   226 $\boxed{291 \quad 292}$ 331 456   487

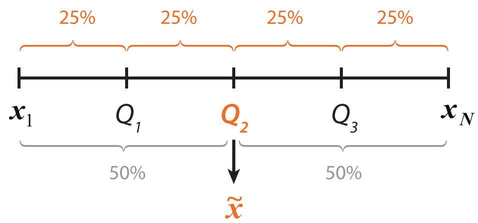
$$\tilde{x} = \frac{291 + 292}{2} = 291{,}5$$

$\tilde{x}$: notação simbólica da mediana.

Então, pelo menos 50% dos dados são menores ou iguais a 291,5 e pelo menos 50% dos dados são maiores ou iguais a 291,5 pessoas.

Os quartis são os valores que dividem a distribuição dos dados em quatro partes iguais, correspondendo cada uma delas a 25% do total dos dados ordenados por ordem crescente.

Para localizar os quartis procede-se de forma similar à determinação da mediana, ou seja, determina-se a mediana na primeira e na segunda metade dos dados.



133 **149 226** 291 | 292 **331 456** 487

$$Q_1 = \frac{149 + 226}{2} = 187,5 \qquad Q_3 = \frac{331 + 456}{2} = 393,5$$

Notação simbólica dos quartis:

1º quartil: Q_1

2º quartil: $Q_2 = \tilde{x}$

3º quartil: Q_3

Então, pelo menos 25% dos registos trimestrais são inferiores ou iguais a 149 pessoas, pelo menos 50% dos registos trimestrrais são menores ou iguais a 291,5 pessoas e pelo menos 75% dos registos trimestrais são inferiores ou iguais a 456 pessoas.

EXEMPLO 2 (dados agrupados, quantitativos discretos)

Considera a situação já descrita anteriormente relativa às classificações (numa escala de 0 a 20) do último trabalho dos alunos de uma turma na disciplina de Economia e Métodos Quantitativos e a respetiva tabela de frequências absolutas, simples e acumulada.

Classificações	Frequência absoluta (f_i)	Frequência absoluta acumulada (F_i)
8	5	5
9	7	12
10	7	19
12	8	27
15	6	33
17	3	36

A **moda** desta distribuição é a classificação 12 porque é valor com maior frequência absoluta.

$M_o = 12$

Moda, M_o, é o dado estatístico que ocorre mais vezes numa distribuição (aquele que tem maior frequência).

Determinação da moda nas seguintes distribuições:

4 3 5 7 1 2 — distribuição amodal (não existe moda)

4 3 5 4 3 2 — distribuição bimodal (existem duas modas)

4 3 5 4 3 5 1 — distribuição multimodas (existem mais do que duas modas)

A média das classificações deste trabalho é igual ao quociente entre a soma dos produtos das classificações pela correspondente frequência absoluta e o número total de alunos.

$$\bar{x} = \frac{8\times 5 + 9\times 7 + 10\times 7 + 12\times 8 + 15\times 6 + 17\times 3}{36} = \frac{410}{36} \approx 11{,}39$$

Então, a média das classificações deste trabalho é igual a 11,39 valores, aproximadamente.

Se tivermos N dados $x_1, x_2, ..., x_N$ e f_i é a frequência absoluta do valor x_i, então a média é igual a:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \times f_1 + x_2 \times f_2 + ... + x_N \times f_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \times f_N}{N}$$

Para facilitar a localização da **mediana** e dos **quartis** utilizamos as frequências relativas acumuladas em percentagem:

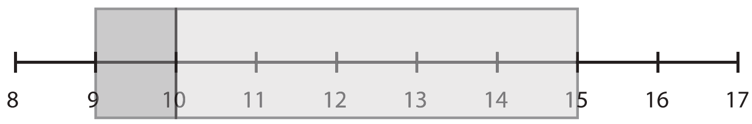
Classificações	Frequência absoluta (f_i)	Frequência relativa (fr_i)	Frequência relativa acumulada (Fr_i%)	
8	5	13,9	13,9	
9	7	19,4	33,3	← $Q_1 = 9$, $Fr_i\%$ imediatamente igual ou superior a 25%
10	7	19,4	52,7	← $Q_2 = 10$, $Fr_i\%$ imediatamente igual ou superior a 50%
12	8	22,2	74,9	
15	6	16,7	91,6	← $Q_3 = 15$, $Fr_i\%$ imediatamente igual ou superior a 75%
17	3	8,3	99,9	

$Q_1 = 9$, então pelo menos 25% das classificações são inferiores ou iguais a 8 valores.

$\tilde{x} = Q_2 = 10$, então, pelo menos 50% das classificações são inferiores ou iguais a 10 valores.

$Q_3 = 15$, então pelo menos 75% das classificações são inferiores ou iguais a 15 valores.

Para a representação dos quartis, **diagrama de extremos e quartis**, usamos os valores dos extremos da distribuição e dos quartis.



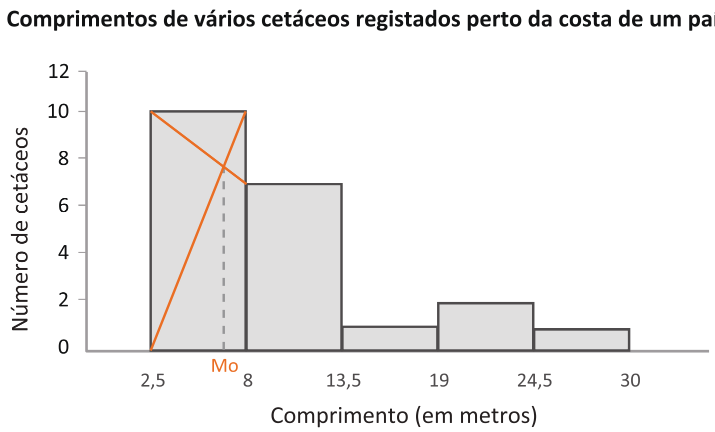
EXEMPLO 3 (dados agrupados, quantitativos contínuos)

Considera a situação já descrita anteriormente relativa ao registo do comprimento de vários cetáceos perto da costa de um país e respetiva tabela de frequências absolutas, relativas e relativas acumuladas em percentagem.

Comprimentos (metros)	Marca da classe	Frequência absoluta (f_i)	Frequência relativa (fr_i)	Frequência relativa acumulada (Fr_i)
[2,5 ; 8 [	5,25	10	0,476	47,6
[8 ; 13,5 [	10,75	7	0,333	80,9
[13,5 ; 19 [	16,25	1	0,048	85,7
[19 ; 24,5 [	21,75	2	0,095	95,3
[24,5 ; 30 [	27,25	1	0,048	100

Nas distribuições onde os dados estão agrupados em classes podemos indicar a classe modal, uma aproximação da média e a classe mediana. A **classe modal** é a classe [2,5 ; 8[pois é a que tem maior frequência.

Podemos estimar o valor da moda geometricamente.



Comprimentos (metros)	Frequência absoluta (f_i)
[2,5 ; 8 [	10
[8 ; 13,5 [	7
[13,5 ; 19 [	1
[19 ; 24,5 [	2
[24,5 ; 30 [	1

- Unem-se os vértices superiores do rectângulo representativo da classe modal com os vértices das classes contíguas, de forma a encontrar o ponto de intersecção;

- Baixa-se a perpendicular do ponto encontrado para o eixo horizontal, localizando-se assim, aproximadamente, o valor da moda.

Para calcular uma aproximação da **média** em dados agrupados em classes consideramos:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \times f_N}{N}$$, onde x_i é a marca da classe de ordem *i* e f_i é a sua frequência absoluta.

$$\bar{x} = \frac{5{,}25 \times 10 + 10{,}75 \times 7 + 16{,}25 \times 1 + 21{,}75 \times 2 + 27{,}25 \times 1}{21} = \frac{214{,}75}{21} = 10{,}23$$

Então, o comprimento médio destes cetáceos é, aproximadamente, igual a 10,23 metros.

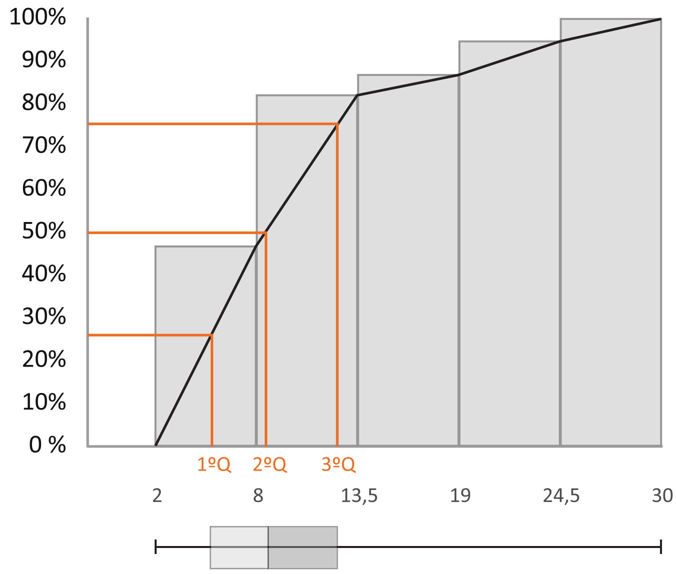
Para indicar a classe mediana e as classes a que pertencem os restantes quartis podemos recorrer às frequências relativas acumuladas em percentagem.

Comprimentos (metros)	Frequência absoluta (f_i)	Frequência relativa (fr_i)	Frequência relativa acumulada (Fr_i)	
[2,5 ; 8 [	10	47,6	47,6	← Q_1
[8 ; 13,5 [	7	33,3	80,9	← Q_2 e Q_3
[13,5 ; 19 [	1	4,8	85,7	
[19 ; 24,5 [	2	9,5	95,3	
[24,5 ; 30 [	1	4,8	100	

Então o 1º quartil pertence à classe [2,5 ; 8[e o 2º quartil e o 3º quartil pertencem à classe [*8 ; 13,5*[.

Para obter um valor aproximado dos quartis, considerando que a distribuição é linear dentro de cada classe, recorremos à linha poligonal obtida unindo os vértices superiores direitos dos retângulos do histograma de frequências relativas acumuladas, em percentagem.

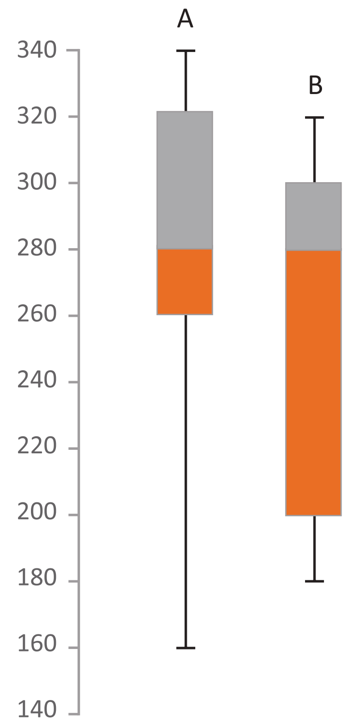
Depois de localizadas estas medidas, podemos desenhar o diagrama de extremos e quartis, aproveitando a escala do eixo horizontal.



A utilização destas medidas na interpretação dos dados deve ser feita com algum cuidado, dependendo do contexto da situação, para que as conclusões tiradas sejam fiáveis.

EXEMPLO 4 (interpretação do diagrama de extremos e quartis)

Os diagramas de extremos e quartis representados ao lado são relativos aos ordenados de duas empresas, A e B, em USD.



a) Qual é o ordenado mais alto e o mais baixo em cada uma das empresas?

Empresa A: 160 USD (mais baixo); 340 USD (mais alto);

Empresa B: 180 USD (mais baixo); 320 USD (mais alto).

b) Em qual das empresas pelo menos 75% dos trabalhadores ganham têm ordenado menor ou igual a 300 USD?

Empresa B.

c) Em qual das empresas pelo menos 25% dos trabalhadores têm ordenados com valores compreendidos entre 260 USD e 280 USD?

Empresa A.

d) Na empresa A existem mais trabalhadores com ordenados superiores ou iguais a 320 USD ou com ordenados inferiores ou iguais a 260 USD?

Existem mais trabalhadores com ordenados superiores ou iguais a 320 USD porque, no intervalo entre 320 USD e 340 USD os dados estão mais concentrados e no intervalo entre 160 USD e 260 USD os dados estão mais dispersos.

TAREFA 3:

1. Determina a moda, média e mediana dos seguintes conjuntos de dados:

a) 3 5 8 3 5 7 1 4 4 4 2 4 1

b) 13 12 12 12 13 17 13 15 14 14 13 12

2. O proprietário de um restaurante registou o número diário de refeições vendidas, durante o mês de Abril.

12	14	14	13	15	18	11	14	13	15
13	13	12	14	11	12	12	14	12	12
14	14	12	12	13	13	13	15	11	11

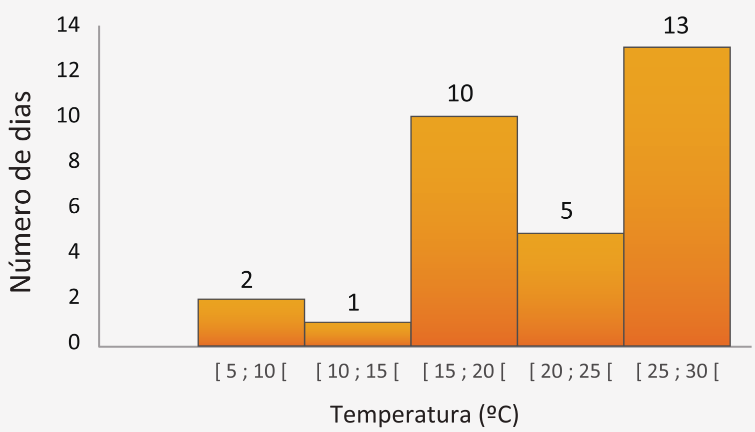
a) Constrói uma tabela de frequências absolutas e relativas acumuladas em percentagem;

b) Determina a moda e um valor aproximado da mediana;

c) Calcula a média diária de refeições vendidas nesse mês;

d) Constrói o diagrama de extremos e quartis.

3. Observa o histograma que representa as temperaturas máximas registadas numa cidade ao longo de trinta e um dias.



a) Constrói uma tabela de frequências absolutas e relativas;

b) Determina a percentagem de dias em que a temperatura foi inferior a 20 °C.

c) Determina um valor aproximado da média da distribuição das temperaturas.

d) Indica a classe modal e localiza geometricamente o valor aproximado da moda.

e) Constrói o diagrama de extremos e quartis desta distribuição, com base na localização geométrica destes valores no histograma de frequências relativas acumuladas em percentagem.